Tentamen

Elektriciteit en Magnetisme 1

Woensdag 11 juli 2012

09:00-12:00

Leg uw collegekaart aan de rechterkant van de tafel.

Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.
***Schrijf leesbaar*.**

Maak elke opgave op een *apart* vel.

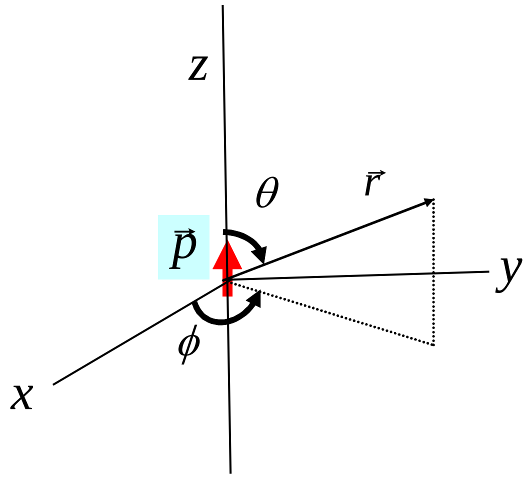
Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.

OPGAVE 1

Punten: a+b+c+d+e=2+4+4+4+4=18

Een elektrische dipool bevindt zich in de oorsprong (0, 0, 0) (zie figuur). Het dipoolmoment wordt gegeven door $\vec{p} = p\hat{z}$. Als we veronderstellen dat we de dipool kunnen beschrijven als een mathematische (of pure) dipool dan wordt de potentiaal gegeven door

$$V_{dip}(r,\theta) = \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



a) Leg uit wat bedoeld wordt met een ‘mathematische’ dipool.

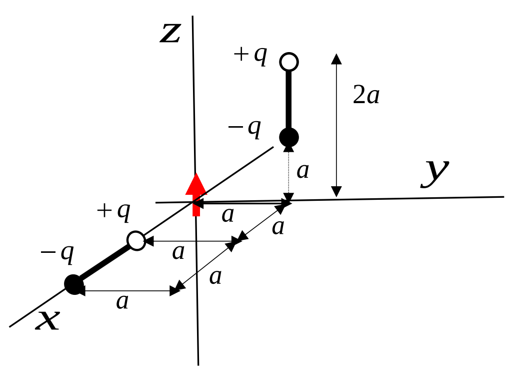
b) Gebruik de potentiaal om aan te tonen dat het elektrische veld gegeven wordt door

$$\vec{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

c) Bereken de grootte en richting van de kracht op een lading $+q$ op de *x*-as in het punt (2*a*, 0, 0). Geef een uitdrukking in bolcoördinaten en een uitdrukking in cartesische coördinaten.

d) Doe hetzelfde voor een lading $-q$ in punt (*a*, 0, -*a*).

e) Stel nu dat we (naast de mathematische dipool in de oorsprong) ook een fysische dipool hebben die langs de *x*-as ligt (zie onderstaande figuur) met een lading *q* in het punt (*a*, 0, 0) en een lading –*q* in het punt (2*a*, 0, 0). Hoeveel energie kost het om deze fysische dipool in het *zy*-vlak te brengen met de negatieve lading in het punt (0, *a*, *a*) en de positieve lading in het punt (0, *a*, 2*a*)



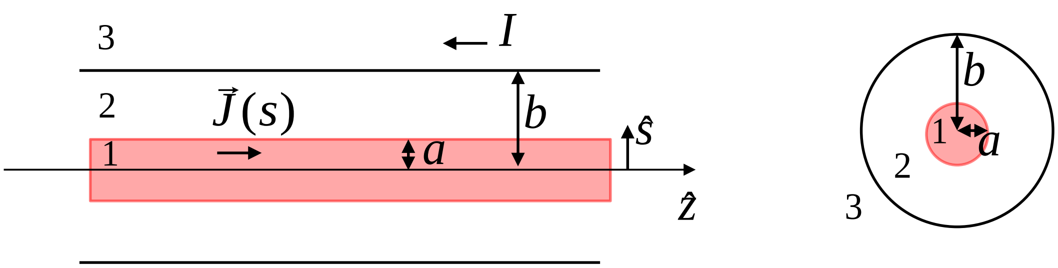
OPGAVE 2

Punten: a+b+c+d+e =4+3+4+4+3=18

Een lange cilinder met straal a ligt met de lengteas langs de z-as (figuur). Door deze cilinder stroomt lading in de $+\hat{z}$-richting, deze stroom wordt beschreven door de volgende stroomdichtheid (in C s^{-1} m^{-2}):

$$\vec{J}(s) = \frac{k \sin\left(\frac{s\pi}{a}\right)}{s}\hat{z}$$

waarin k een constante is. Coaxiaal om de cilinder heen ligt een cilinderoppervlak met straal b. Over deze cilinder stroomt een stroom I (in C s^{-1}) in de $-\hat{z}$ richting. Deze stroom is homogeen over het cilinderoppervlak verdeeld. Je mag in deze opgave veronderstellen dat de cilinder oneindig lang is en dat het cilinderoppervlak oneindig dun is.



Figuur: *Lengte- (links) en dwarsdoorsnede (rechts) van de geometrie van de opgave.*

Gegeven is dat $k = \frac{I}{4a}$

a) Bewijs dat de grootte van totale stroom door de lange cilinder met straal a gelijk is aan I.

b) Geef de wet van Ampère in integrale vorm en leid hieruit de wet van Ampère in differentiële vorm af.

We delen de ruimte op in de volgende drie gebieden (zie figuur):
1) $s < a$; 2) $a \leq s \leq b$; 3) $s > b$.

c) Bereken het magnetische veld $\vec{B}$ in de gebieden 1, 2, en 3.

Er wordt een paramagnetisch materiaal (met magnetische susceptibiliteit χ_m) aangebracht in gebied 2.

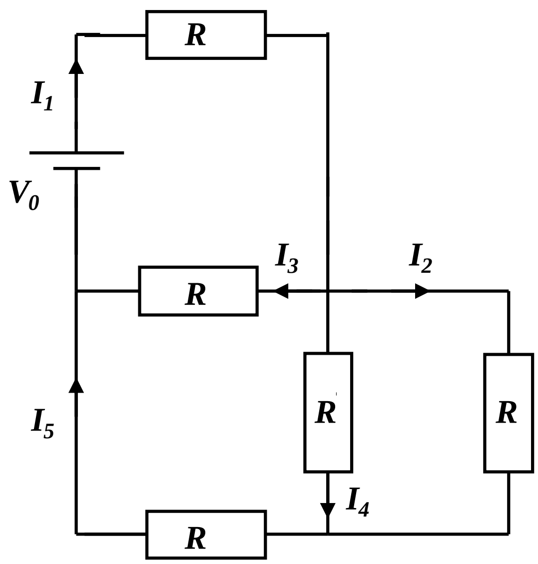
d) Bereken nu het magnetische (hulp)veld $\vec{H}$ en het magnetische veld $\vec{B}$ in gebied 2. Neemt de grootte van $\vec{B}$ in gebied 2 toe of af ten gevolge van het paramagnetische materiaal?

e) Toon aan dat op de rand bij $s = b$ voldaan is aan de volgende randconditie ($\vec{K}$ is hier een oppervlaktestroomdichtheid):
$$\vec{B}_{boven} - \vec{B}_{onder} = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n})$$

OPGAVE 3

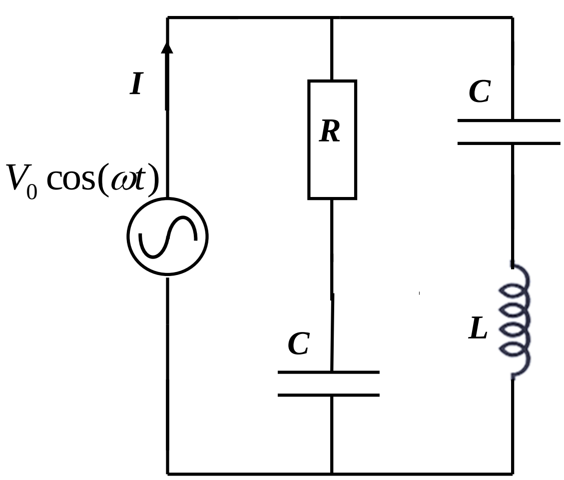
Punten: a+b+c+d+e=4+3+4+4+3=18

Gegeven is de getekende schakeling.



a) Geef alle vergelijkingen voor de knopen (Kirchhoff 1).
b) Geef alle vergelijkingen voor de mazen (Kirchhoff 2).
c) Gegeven is dat $V_0 = 8$ V en $R = 1\ \Omega$. Bereken de waarde van alle in de schakeling aangegeven stromen.

Gegeven is de hieronder getekende schakeling voor een stationaire wisselspanningsbron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $V = V_0 \cos{(\omega t)}$.



d) Geef de stroom I in de complexe schrijfwijze.
e) Geef de stroom I in de reële schrijfwijze.

OPGAVE 4
Punten: a+b+c+d =4+4+6+4=18

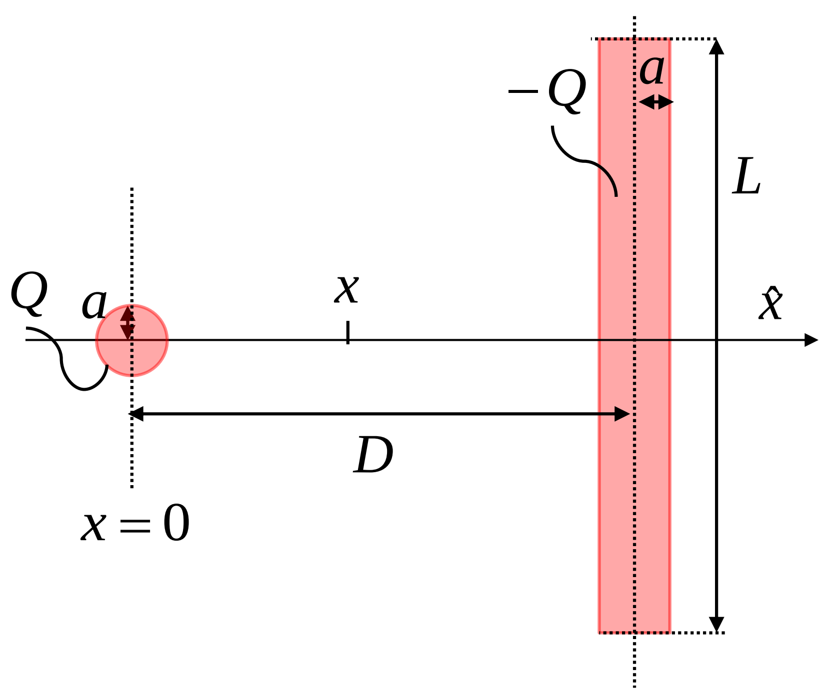
In de oorsprong bevindt zich het middelpunt van een geleidende bol met straal a. In het punt $x = D$ bevindt zich het middelpunt van een geleidende cilinder met straal a en lengte L waarvan de lengteas loodrecht op de *x*-as staat (zie figuur). We brengen nu op de geleidende bol een lading Q en op de geleidende cilinder een lading –Q aan. Je mag in deze opgave aannemen dat de verhouding a/L zodanig klein is dat randeffecten mogen worden verwaarloosd (je mag dus een homogene ladingsverdeling over de cilinder veronderstellen). Tevens is de verhouding a/D voldoende klein zodat de ladingen op de geleiders elkaar niet beïnvloeden.

Druk, in je antwoord op onderstaande vragen, de richting van een veld of kracht uit in combinaties van de eenheidsvectoren $\hat{x}$, $\hat{y}$, en $\hat{z}$.

a) Bereken (via de wet van Gauss) het elektrisch veld $\vec{E}$ ten gevolge van de lading op de bol op de positie *x* (zie figuur).
b) Bereken (via de wet van Gauss) het elektrisch veld $\vec{E}$ ten gevolge van de lading op de cilinder op de positie *x* (zie figuur).
c) Laat zien dat het potentiaalverschil ΔV tussen de bol en de cilinder gegeven wordt door,

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{D-2a}{2(D-a)a} + \frac{1}{L}\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)\right]$$

d) Gegeven is nu dat $D = 7a$ en $L = 12\ln(6)a$. Bereken de capaciteit C van dit systeem van twee geleiders.



Uitwerking

OPGAVE 1

Onderdeel a)
Een mathematische of pure dipool is een abstractie van een fysische dipool waarbij de afstand d tussen de lading naar nul gaat, de grootte van de ladingen q naar oneindig gaat terwijl het product $p = dq$ (het dipoolmoment) constant blijft.

Onderdeel b)
Zie boek pagina 153, gebruik $\vec{E} = -\nabla V$ in bolcoördinaten

$$E_{dip,r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_{dip,r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_{dip,\phi} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Onderdeel c)

Gebruik $\vec{F}(2a, 0, 0) = q\vec{E}_{dip}(2a, 0, 0)$

Op de x-as geldt $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta = 1 \wedge \cos\theta = 0$ en dus (gebruik gegeven formule voor het dipoolveld)

$$\vec{F}(2a,0,0) = q\frac{p}{4\pi\varepsilon_0(2a)^3}\hat{\theta} = q\frac{p}{32\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\theta}$$

en met $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} = -\hat{z}$ volgt

$$\vec{F}(2a,0,0) = -q\frac{p}{32\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{z}$$

Onderdeel d)

Gaat idem als onderdeel c maar dan iets meer rekenen.

$$\vec{F}(a,0,-a) = -q\vec{E}_{dip}(a,0,-a)$$

In het punt (a, 0, -a) geldt

$\theta = \dfrac{3\pi}{4} \wedge \phi = 0 \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sin\phi = 0$ en $\cos\phi = 1$ en ook

$r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$ en dus

$$\vec{F}(a,0,-a) = -q\frac{p}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(-\sqrt{2}\hat{r} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{\theta})$$

En met

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{x} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{x} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$

wordt dit

$$\vec{F}(a,0,-a) = -q\frac{p}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(-\hat{x} + \hat{z} - \tfrac{1}{2}\hat{x} - \tfrac{1}{2}\hat{z}) = -q\frac{p}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(-\tfrac{3}{2}\hat{x} + \tfrac{1}{2}\hat{z}) = q\frac{p}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(3\hat{x} - \hat{z})$$

Onderdeel d)

$\Delta E = W = +q[V(0, a, 2a) - V(a, 0, 0)] - q[V(0, a, a) - V(2a, 0, 0)]$ en dus

$$\Delta E = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{5}a\right)^2} - 0 - \frac{p\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} + 0\right] = \frac{pq\left(\frac{4}{5}\sqrt{5} - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)}{40\pi\varepsilon_0 a^2}$$

OPGAVE 2

Onderdeel a)
We noteren de grootte van de stroom door de cilinder met I_c, deze wordt gegeven door:

$$I_c = \int_0^a 2\pi s J(s) ds$$
$$= \int_0^a 2\pi s \frac{k \sin\left(\frac{s\pi}{a}\right)}{s} ds = 2\pi k \int_0^a \sin\left(\frac{s\pi}{a}\right) ds = -2\pi k \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{s\pi}{a}\right)\Big|_0^a$$
$$= 4ak$$

Deze grootte is gelijk aan I als $k = \frac{I}{4a}$

Onderdeel b)
De wet van Ampère in integrale vorm is: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}$. Hieruit volgt via de rotatiestelling:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

en dus: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.

Onderdeel c)
We hebben cilindersymmetrie dus de velden zijn in de $\hat{\varphi}$ richting. Maak een Ampère-lus (cirkel) om de z-as met straal $s < a$ en gebruik de wet van Ampère in integrale vorm.

In gebied 1) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi s B = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_0^s 2\pi \acute{s} \frac{k \sin\left(\frac{\acute{s}\pi}{a}\right)}{\acute{s}} d\acute{s} = 2\pi k \mu_0 \int_0^s \sin\left(\frac{\acute{s}\pi}{a}\right) d\acute{s}$
Dus, $B = \frac{k\mu_0}{s}\left(-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\acute{s}\pi}{a}\right)\Big|_0^s\right) = \frac{ak\mu_0}{s\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{s\pi}{a}\right)\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left(1 - \cos\left(\frac{s\pi}{a}\right)\right)$ en tenslotte $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left(1 - \cos\left(\frac{s\pi}{a}\right)\right)\hat{\varphi}$.

In gebied 2) In dit gebied kiezen we een zelfde Ampère-lus maar nu met straal: $a \leq s \leq b$; dan is de omsloten stroom $I_{enc} = I$ en wordt het magnetische veld:
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\hat{\varphi}$$

In gebied 3) Hier is de omsloten stroom $I_{enc} = I - I = 0$ en dus $\vec{B} = 0$

Onderdeel d)
Voor het magnetische hulpveld $\vec{H}$ geldt in gebied 2) (met een Ampèrelus met straal $a \leq s \leq b$; $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}^{free} = I \Rightarrow 2\pi s H = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi s}$ en dus $\vec{H} = \frac{I}{2\pi s}\hat{\varphi}$. Voor het magnetische veld $\vec{B}$ geldt $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$. Omdat het materiaal paramagnetisch is geldt dat $\chi_m > 0$ en neemt de grootte van $\vec{B}$ toe.

Onderdeel e)

Bij $s = b$ geldt $\vec{B}_{onder} = \frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi b}\hat{\varphi}$ en $\vec{B}_{boven} = 0$.

Verder geldt: $\vec{K} = \vec{K}_f + \vec{K}_b$ de som van de vrije oppervlakte stroom en de gebonden oppervlakte stroom. De gebonden oppervlakte stroom vinden we met: $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H} \times \hat{s} = \frac{\chi_m I}{2\pi b}\hat{\varphi} \times \hat{s} = -\frac{\chi_m I}{2\pi b}\hat{z}$. De vrije oppervlaktestroom is $\vec{K}_f = -\frac{I}{2\pi b}\hat{z}$.

En dus $\vec{B}_{boven} - \vec{B}_{onder} = 0 - \frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi b}\hat{\varphi} = -\frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi b}\hat{\varphi}$ en

$\mu_0(\vec{K} \times \hat{n}) = -\mu_0\left(\frac{I}{2\pi b} + \frac{\chi_m I}{2\pi b}\right)\hat{z} \times \hat{s} = -\frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi b}\hat{\varphi}$. Dus er is voldaan aan de randconditie.

OPGAVE 3

Onderdeel a)

Er zijn drie knopen, hiervoor gelden de volgende drie knoopvergelijkingen.

K1: $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$
K2: $I_2 + I_4 - I_5 = 0$
K3: $I_5 + I_3 - I_1 = 0$

Deze zijn niet onafhankelijk; de derde vergelijking K3 volgt bijvoorbeeld uit K2+K1.

Onderdeel b)
Er zijn drie mazen, hiervoor gelden de volgende drie maasvergelijkingen (doorloop de mazen met de klok mee, rechtsom).

M1: $V_0 - I_1 R - I_3 R = 0$
M2: $I_3 R - I_4 R - I_5 R = 0$
M3: $-I_2 R + I_4 R = 0$

Onderdeel c)
We hebben 5 onafhankelijke vergelijkingen met 5 onbekenden (de stromen). Dit stelsel kunnen we oplossen.
Stel $I_2 = I$ dan volgt uit M3 dat $I_4 = I$ uit K2 dat $I_5 = I_2 + I_4 = 2I$ en uit M2 dat $I_3 = I_4 + I_5 = 3I$. Uit M1 volgt dan;

$$I_1 = \frac{V_0 - 3IR}{R}$$

Substitutie van al deze stromen in K1 levert;

$$\frac{V_0}{R} - 3I - I - 3I - I = 0 \Rightarrow 8I = \frac{V_0}{R} \Rightarrow I = \frac{V_0}{8R}$$

En met $V_0 = 8$ V en $R = 1\ \Omega$ wordt dit $I = 1$ A. Voor de stromen vinden we dan

$$I_1 = \frac{V_0 - 3IR}{R} = \frac{8-3}{1} = 5 \text{ A}$$

$I_2 = I = 1$ A
$I_3 = 3I = 3$ A
$I_4 = I = 1$ A
$I_5 = 2I = 2$ A

Onderdeel d)

Definieer stromen I (door de spanningsbron naar boven), I_1 (door de weerstand naar beneden) en I_2 (door de rechter condensator naar beneden).

Kirchhoff 1 (er is 1 onafhankelijke knoop-vergelijking),

$I = I_1 + I_2$

Kirchhoff 2 (er zijn 2 mazen, met de klok mee),

$$V_0 - RI_1 - Z_C I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_0}{R + Z_C}$$

$$Z_C I_1 + RI_1 - Z_c I_2 - Z_L I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1(Z_C + R)}{Z_C + Z_L} = \frac{V_0}{Z_C + Z_L}$$

En dus

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_0}{R + Z_C} + \frac{V_0}{Z_C + Z_L} = V_0\left(\frac{R + 2Z_C + Z_L}{(R + Z_c)(Z_C + Z_L)}\right)$$

Er geldt: $Z_L = i\omega L$ en $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$.

Dit invullen levert I in de complexe schrijfwijze,

$$I = V_0\left(\frac{R - \frac{2i}{\omega C} + i\omega L}{\left(R - \frac{i}{\omega C}\right)\left(i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)}\right) = V_0\left(\frac{R + i\left(\omega L - \frac{2}{\omega C}\right)}{\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) + i\left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)}\right)$$

Onderdeel e)
Voor de reële schrijfwijze vinden we,

$$|I| = \left|V_0\left(\frac{R + i\left(\omega L - \frac{2}{\omega C}\right)}{\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) + i\left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)}\right)\right| = \frac{V_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{2}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2 + \left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)^2}}$$

en

$$\arg(I) = \arg\left(R + i\left(\omega L - \frac{2}{\omega C}\right)\right) - \arg\left(\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) + i\left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{2}{\omega C}}{R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)}{\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}\right)$$

En dus de reële schrijfwijze wordt

$$I = V_0 \frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{2}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2 + \left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)^2}} \cos{(\omega t + \varphi)}$$

Met

$$\varphi = \arg I = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{2}{\omega C}}{R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\left(\omega RL - \frac{R}{\omega C}\right)}{\left(\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}\right)$$

OPGAVE 4

Onderdeel a) Wet van Gauss toepassen op een boloppervlak met straal x. Veld is wegens bolsymmetrie in de radiale richting.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi x^2 E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

De radiale richting in het punt x is de $\hat{x}$-richting dus;

$$\vec{E}_{bol}(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x}$$

Onderdeel b) Wet van Gauss toepassen op een cilinderoppervlak met straal $D - x$ en lengte ℓ. Veld is wegens cilindersymmetrie in de richting loodrecht op de cilinder.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi(D-x)\ell E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{-Q}{\varepsilon_0}\frac{\ell}{L} \Rightarrow E = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0(D-x)L}$$

De richting loodrecht op de cilinder in het punt x is de $-\hat{x}$-richting dus;

$$\vec{E}_{cyl}(x) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(D-x)L}\hat{x}$$

c) Omdat het geleiders zijn is de potentiaal in ieder punt van de geleider gelijk. We kunnen dus om het gevraagde potentiaalverschil te bepalen bijvoorbeeld het potentiaalverschil tussen het punt $x = a$ (oppervlak van de bol) en het punt $x = D - a$ (oppervlak van de cilinder) berekenen. Dit potentiaalverschil wordt gegeven door,

$$\Delta V = -\int_{D-a}^{a} E(x)dx = +\int_{a}^{D-a} E(x)dx = \int_{a}^{D-a} \left(E_{bol}(x) + E_{cyl}(x)\right)dx \Rightarrow$$

$$\Delta V = \int_{a}^{D-a} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(D-x)L}\right)dx = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{a}^{D-a} \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{(D-x)L}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{2x} - \frac{1}{L}\ln(D-x)\right]_a^{D-a} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{2(D-a)} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{L}\ln(a) + \frac{1}{L}\ln(D-a)\right]$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-a+D-a}{2(D-a)a} + \frac{1}{L}\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)\right] = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{D-2a}{2(D-a)a} + \frac{1}{L}\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)\right]$$

Onderdeel d)

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Met de gegevens vinden we

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{7a-2a}{2(7a-a)a} + \frac{1}{12\ln 6\,a}\ln\left(\frac{7a-a}{a}\right)\right] = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{5}{12a} + \frac{1}{12a}\right] = \frac{Q}{4\pi a\varepsilon_0}$$

En dus $C = 4\pi a\varepsilon_0$